第 1 讲　　乘法公式

【归纳初中知识】

在初中，我们学习了多项式的乘法运算，知道乘法公式可以使多项式的运算变得更为简便. 初中主要学习了两个基本的乘法公式——平方差公式和完全平方公式.

公式 1 **平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.**

公式 2 **完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.**

【衔接高中知识】

高中代数部分是以函数为主线展开学习的，为研究函数的性质，需要同学们具有较强的代数恒等变形能力，也就是说，在高中学习中还会遇到更为复杂的多项式的乘法运算. 因此，在本节中，我们将拓展乘法公式的内容，补充一些高中常用的乘法公式.

由于
$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)\\&=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

于是有：

公式 3 **完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.**

将公式三中的 b 全部换成 $-b$，得到立方差公式：

公式 4 **完全立方差公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.**

由完全立方和公式可得 $(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=a^3+b^3$，即

$(a+b)[(a+b)^2-3ab]=a^3+b^3$.

于是有

公式 5 **立方和公式：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.**

仿公式四，请同学们思考：

公式 6 **立方差公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$________.**

由于
$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

于是有：

公式 7 **$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.**

同时，我们还应注意乘法公式的一些常见变形：

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
2. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$;
3. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$;
4. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

【精讲典型例题】

例 1 已知 $x+y=-5, xy=6$，求 x^2+y^2 的值.

分析 利用完全平方公式的变形 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 进行求解.

解： $\because x+y=-5, xy=6$.

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=(-5)^2-2\times 6$$
$$=13.$$

例 2 计算：$(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$.

分析 观察式子的结构特点，可先后套用完全平方公式和立方和公式进行计算.

解： 原式 $=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2$

$$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2$$
$$=(x^3+y^3)^2=x^6+2x^3y^3+y^6.$$

例 3 当 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$ 时，求下列各式的值.

(1) $bc+ca+ab$；

(2) $a^4+b^4+c^4$.

分析 将(1)与已知联系，联想已知中的等式，发现可将 $bc+ca+ab$ 用 $a+b+c$ 和 $a^2+b^2+c^2$ 表示. 由于 $a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$. 由(1)得到启示，如果知道 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 的值，就能得解.

解： (1) $\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

且 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$，

$\therefore 0^2=1+2(ab+bc+ca)$，

即 $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}$.

(2) $\because (bc+ca+ab)^2$

$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$
$$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c),$$

$\therefore b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{1}{4}$.

$$\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$
$$=1-2\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

例 4 老师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times 2$；$9^2-7^2=8\times 4$；$15^2-3^2=8\times 27$；李正接着又写了两个具有同样规律的算式：

$11^2-5^2=8\times 12$；$15^2-7^2=8\times 22$.

(1)请你再写出两个具有上述规律的算式；

(2)用文字写出上述算式反映的规律；

(3)证明这个规律的正确性.

分析 先类比写出算式，然后归纳出一般的规律，最后进行证明.

解：(1)$7^2-5^2=8\times3$；$11^2-3^2=8\times14$.

(2)规律：任意两个奇数的平方差等于8的倍数.

(3)证明：设m,n为整数，则$2m+1$和$2n+1$为任意两个奇数.

$(2m+1)^2-(2n+1)^2$
$=(2m+1+2n+1)(2m+1-2n-1)$
$=(2m+2n+2)(2m-2n)$
$=4(m-n)(m+n+1)$.

当m,n同奇或同偶时，$4(m-n)$为8的倍数；当m,n一奇一偶时，$4(m+n+1)$为8的倍数. 即任意两个奇数的平方差等于8的倍数.

【检测衔接作业】

一、选择题

1. 下列各式中，不一定成立的是 ( )

A. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ B. $(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$

C. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ D. $(a-b)^2=a^2-b^2$

2. 已知$p^2+q^2=169$，$p-q=7$，那么pq的值为 ( )

A. 120 B. 60 C. 30 D. 15

3. 设$M=(n+\frac{1}{n})^3$，$N=n^3+\frac{1}{n^3}+6$，对于任意$n>0$，则A,B大小关系为 ( )

A. $M\geqslant N$ B. $M>N$ C. $M\leqslant N$ D. 不一定

二、填空题

4. 化简：$(y-3)(y^2+3y+9)=$____________.

5. 已知$(x+y)^2-2x-2y+1=0$，则$(x+y)^{2011}=$____________.

6. 观察下列各式：

$(x-1)(x+1)=x^2-1$；
$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$；
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$；
…

根据上面的规律可得：

$(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)=$____________.

三、解答题

7. 化简：$(m+1)^3-m(m^2+3m+3)$.

8. 计算：$(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

9. 当 $x=\sqrt[3]{3}$时，求代数式$(2x+\frac{1}{x})(4x^2-2+\frac{1}{x^2})-\frac{1}{x^3}$的值.

10. 已知 $a+b+c=0, ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$，求下列各式的值.

(1)$a^2+b^2+c^2$；(2)$a^4+b^4+c^4$.

参考答案

1. D　点拨：根据完全平方公式的特点可知 D 不正确，A、B、C 都正确.

2. B　点拨：$pq=-\frac{1}{2}[(p-q)^2-(p^2+q^2)]=-\frac{1}{2}(49-169)=-\frac{1}{2}\times(-120)=60$.

3. A　点拨：$M-N=(n+\frac{1}{n})^3-n^3-\frac{1}{n^3}-6=n^3+\frac{1}{n^3}+3n\cdot\frac{1}{n^2}+3n^2\cdot\frac{1}{n}-n^3-\frac{1}{n^3}-6=3(n+\frac{1}{n})-6$，$\because n+\frac{1}{n}=(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}})^2+2\geqslant 2$. $\therefore 3(n+\frac{1}{n})-6\geqslant 0$，$\therefore M\geqslant N$.

4. y^3-27　点拨：$(y-3)(y^2+3y+9)=y^3-3^3=y^3-27$.

5. 1　点拨：由已知得 $x+y=1$，$\therefore (x+y)^{2\,011}=1$.

6. $x^{n+1}-1$　点拨：类比特殊到一般可得.

7. 解：原式$=m^3+3m^2+3m+1-m^3-3m^2-3m=1$.

8. 解：原式$=[(1-a)(1+a+a^2)][(a+1)(a^2-a+1)]=$

$(1-a^3)(1+a^3)=1-(a^3)^2=1-a^6$.

9. 解：原式$=(2x)^3+(\frac{1}{x})^3-\frac{1}{x^3}=8x^3$，将 $x=\sqrt[3]{3}$代入得原式$=8\times 3=24$.

10. 解：(1)$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$，

$\therefore 0=a^2+b^2+c^2-1$，$\therefore a^2+b^2+c^2=1$.

(2)由$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$，

得 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

第 2 讲　　因式分解

【归纳初中知识】

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，它与多项式乘法运算是互逆变形.在初中我们主要学习了两种因式分解的方法——提取公因式法与公式法，其中公式法中直接用公式不超过两次.

方法 1. 提取公因式法：$am+bm=m(a+b)$.

即将多项式中各单项式相同的数字因数或字母因式提出来进行因式分解的方法.

方法 2. 公式法：运用乘法公式进行逆推.

常见的公式有：

(1)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2)$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

(3)$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$；

(4)$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$；

(5)$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$；

(6)$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

【衔接高中知识】

因式分解是高中学习的一个很重要的数学工具，在高中函数、不等式、数列和解析几何等学习中都是不可少的内容.初中学习的提公因式法、公式法（直接用公式不超过两次）进行因式分解，到高中是很不够用的，因而为了能很好地进入高中学习，顺利地完成高中学习任务，我们需要补充一些因式分解的知识和方法.

方法 3. 分组分解法

观察多项式 $xm+xn+ym+yn$，它的各项并没有公因式，也不能直接套用公式，因此不能利用提取公因式法和公式法进行分解因式，但是我们观察到该式前两项有公因式 x，后两项有公因式 y，分别提取后得到 $x(m+n)+y(m+n)$.这时又有了公因式 $m+n$，因此能把多项式 $xm+xn+ym+yn$ 分解因式.分解过程为

$xm+xn+ym+yn$

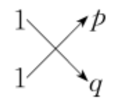
$=x(m+n)+y(m+n)$

$=(m+n)(x+y)$.

一般地，把多项式分组后，在各组分解因式的基础上，再完成整个多项式的因式分解，这种方法叫做分组分解法.

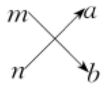
方法 4. 十字相乘法

我们知道，形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 的二次三项式，它的特点是二次项系数是 1，常数 pq 与一次项系数 $p+q$ 可以通过如右图的"十字相乘，乘积相加"的方式建立联系，得到 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$. 这种方法能推广吗？



$1\times p+1\times q=p+q$

下面来看二次三项式 $mnx^2+(mb+na)x+ab$，将其二次项系数 mn，常数项 ab 写成下列十字形式：



发现"十字相乘，乘积相加"，结果恰好为一次项的系数 $mb+na$，由于 $(mx+a)(nx+b)=mnx^2+(mb+na)x+ab$. 从而有：

$mnx^2+(mb+na)x+ab=(mx+a)(nx+b)$.

像这样，通过十字交叉线帮助，把二次三项式分解因式的方法，叫做十字相乘法.

方法 5. 综合除法与因式定理

(1)综合除法：一元多项式除以一元多项式，有一种简便的方法，例如：求多项式 $a_2x^2+a_1x+a_0$ 除以 $x-b$ 的商和余数. 先用一般的除法计算：

$$
\begin{array}{r|lll}
 & a_2x+(a_1+a_2b) & & \\
\hline
x-b & a_2x^2 & +a_1x & +a_0 \\
 & a_2x^2 & -a_2bx & \\
\hline
 & & (a_1+a_2b)x & +a_0 \\
 & & (a_1+a_2b)x & -\ (a_1+a_2b)b \\
\hline
 & & & a_0+(a_1+a_2b)b
\end{array}
$$

所得商式是 $a_2x+(a_1+a_2b)$.

余式是 $a_0+(a_1+a_2b)b$.

(2)因式定理：

我们将 x 的一元 n 次多项式记为 $f(x)$，即

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

并记当 $x=a$ 时，多项式 $f(x)$ 的值为 $f(a)$.

如多项式 $f(x)=3x^2-5x-2$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的值 $f(1)=3\times1^2-5\times1-2=-4$.

①余数定理　多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数等于 $f(b)$.

②因式定理　如果 $x=b$ 时多项式 $f(x)$ 的值为零，即 $f(b)=0$，则 $f(x)$ 能被 $x-b$ 整除[即 $f(x)$ 含有 $x-b$ 的因式].

因式分解还有一些特殊的方法，如换元法、待定系数法、配方法、拆项添项法等.

【精讲典型例题】

例 1　把 $2ax-10ay+5by-bx$ 分解因式.

分析 把这个多项式的四项按前两项与后两项分成两组，并使两组的项按 x 的降幂排列，然后从两组中分别提出公因式 $2a$ 与 $-b$，这时另一个因式正好都是 $x-5y$，这样就可继续提公因式.

解： $2ax-10ay+5by-bx$

$=2a(x-5y)-b(x-5y)$

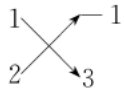
$=(x-5y)(2a-b)$.

例 2 将下列各式分解因式.

(1)$2x^2+x-3$；

(2)$(x^2-x)^2-(x^2-x)-2$；

(3)$x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$.



分析 (1)因为 $2=1\times2$，$-3=(-1)\times3=1\times(-3)$，且一次项系数是 1，所以可按右图用十字相乘法分解因式.

(2)先将 x^2-x 视为一个整体，通过两次十字相乘法得到解决.

(3)可用“广义”的十字相乘法进行分解.

解： (1)$2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$.

(2)$(x^2-x)^2-(x^2-x)-2$

$=[(x^2-x)-2][(x^2-x)+1]$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)$.

(3)$x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$

$=(x+2y)(x-4y)+(-x-14y)-6$

$=(x+2y+2)(x-4y-3)$.

例 3 把 x^3+3x-4 分解因式.

分析 记 $f(x)=x^3+3x-4$，则 $f(1)=1+3-4=0$，由因式定理知 $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除[即 $f(x)$ 含有 $x-1$ 因式].

解： $x^3+3x-4=x^3-x+4x-4$

$=x(x^2-1)+4(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+4)$.

例 4 已知 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是质数，求 n 的值.

分析 从因式分解的角度来看，质数只能分解成 1 和本身的乘积(也可从整除的角度看)，故对原式进行恰当地分解变形，是本例最自然的思路.

解： $n^4-16n^2+100=n^4+20n^2+100-36n^2$

$=(n^2+10)^2-36n^2$

$=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$.

因为 $n^2+6n+10\neq1$，而 n^4-16n^2+100 为质数且 n 为正整数，故 $n^2-6n+10=1$，即 $(n-3)^2=0$，解得 $n=3$.

【检测衔接作业】

一、选择题

1. 把代数式 $ax^2-4ax+4a$ 分解因式，下列结果中正确的是 ( )

A. $a(x-2)^2$　　B. $a(x+2)^2$　　C. $a(x-4)^2$　　D. $a(x+2)(x-2)$

2. 下列各式中，不是 $4x^4-17x^2+4$ 的因式的是 ( )

A. $x-\frac{1}{2}$　　B. $x+2$　　C. $x-2$　　D. $x-4$

3. 要使二次三项式 x^2-5x+p 在整数范围内能进行因式分解，那么整数 p 的取值可以有 ( )

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 无数多个

二、填空题

4. 分解因式：$x^4-x^2+4x-4=$____________

5. 若多项式 $a^2+(k-1)ab+9b^2$ 能运用完全平方式进行因式分解，则 $k=$________.

6. $\triangle ABC$ 的三边满足 $a^2-2bc=c^2-2ab$，则$\triangle ABC$ 的形状是____________.

三、解答题

7. 分解因式：(1)$4x^2-x-3$；　　(2)$x^3-y^3-x^2y+xy^2$.

8. 分解因式：$ab(a+b)^2-(a+b)^2+1$.

9. 已知 $m=x-y$，$n=xy$，试用 m，n 表示$(x^3+y^3)^2$.

10. 多项式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式是 $x+y-2$，试确定 $a+b$ 的值.

参考答案

1. A　点拨:原式$=a(x^2-4x+4)=a(x-2)^2$.

2. D　点拨:设 $f(x)=4x^4-17x^2+4$,则 $f(4)=4\times4^4-17\times4^2+4\neq0$,故 $x-4$ 不是 $4x^4-17x^2+4$ 的因式,或者直接将 $4x^4-17x^2+4$ 分解因式进行判断.

3. D　点拨:任取正整数 n,则 p 可取 $n(-5-n)$,故 p 的取值可以有无数多个.

4. $(x+2)(x-1)(x^2-x+2)$　点拨:原式$=x^4-(x^2-4x+4)=x^4-(x-2)^2=(x^2+x-2)(x^2-x+2)=(x+2)(x-1)(x^2-x+2)$.

5. 7 或-5　点拨:对照完全平方公式可知 $k-1=\pm6$,∴ $k=7$ 或-5.

6. 等腰三角形　点拨:由 $a^2-2bc=c^2-2ab$ 得$(a-c)(a+c+2b)=0$,∵ $a+c+2b\neq0$,∴$a=c$.

7. 解:(1)原式$=(x-1)(4x+3)$.

(2)原式$=(x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(x-y)$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2-xy)$

$=(x-y)(x^2+y^2)$.

8. 解:设 $a+b=x$,则原式$=abx^2-(a+b)x+1=(ax-1)(bx-1)=(a^2+ab-1)(b^2+ab-1)$.

9. 解:∵$(x^3+y^3)^2=(x^3-y^3)^2+4x^3y^3=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2+4x^3y^3$

$=(x-y)^2[(x-y)^2+3xy]^2+4x^3y^3$

$=m^2(m^2+3n)^2+4n^3$.

10. 解:由已知,可设另一个因式为 $x+by-3$,

∴ $x^2+axy+by^2-5x+y+6$

$=(x+y-2)(x+by-3)$

$=x^2+(b+1)xy+by^2-5x-(2b+3)y+6$.

比较系数,得

$\begin{cases}b+1=a,\\2b+3=-1,\end{cases}$ 解之得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

∴ $a+b=-1-2=-3$.

第3讲　绝对值

(1)绝对值的代数意义：正数的绝对值是它的本身，
$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$
负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值仍是零．即
(2)绝对值的几何意义：一个数的绝对值，是数轴上表示它的点到原点的距离．

（没讲）(3)两个数的差的绝对值的几何意义：$|a-b|$ 表示在数轴上，数 a 和数 b 之间的距离．

（4）两个绝对值不等式： $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow$ ____________

$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow$ ____________

练习：

1　若 $|x|=5$，则 x=________；若 $|x|=|-4|$，则 x=________.

2 如果 $|a|+|b|=5$，且 $a=-1$，则 b=_______；若 $|1-c|=2$，则 c=_______.

3．化简：$|x-5|-|2x-13|$（$x>5$）.（用数轴）

4、 (1) $|x-1|>3$；　　(2) $|x+3|+|x-2|<7$

(3) $|x-1|+|x+1|>6$.

根式的概念与运算：

一般地，形如 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 的代数式叫做二次根式．

二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的意义 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

无理式、分母（子）有理化．有理化因式的概念.、最简二次根式、同类二次根式．

练习：将下列式子化为最简二次根式：

（1） $\sqrt{12b}$；　（2） $\sqrt{a^2b}(a\geq 0)$；

（3） $\sqrt{4x^6y}(x<0)$.（4）　计算：$\sqrt{3}\div(3-\sqrt{3})$.

（ 5 ） 化简：（1） $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$；　　（2） $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}(0<x<1)$.

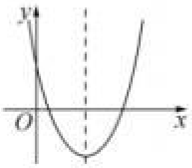
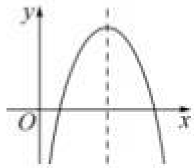
（ 6 ） 已知 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值 .

第 4 讲　二次函数的图象与性质

【归纳初中知识】

初中学过的一次函数、反比例函数、二次函数的课标要求是：能结合具体情境体会函数的意义，根据已知条件确定函数表达式；会画函数的图象，根据不同的函数的图象和解析表达式探索并理解其性质进而解决实际问题；会利用函数的图象求近似解的问题.

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象、性质如下表所示.

	$a>0$	$a<0$
图象		
对称轴	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$
顶点	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$
最值	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 取最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 取最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.
增减性	当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减小； 当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大.	当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大； 当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减小.

【衔接高中知识】

函数是高中数学的一条主线，如高中数学中的数列、三角函数、导数等都是函数. 因此有必要对二次函数进行再研究，通过以二次函数为载体，进一步探讨函数的相关性质.

1. 二次函数的三种表示方法：

(1)一般式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$；

(2)顶点式：$y=a(x-h)^2+k$；其中 (h,k) 为抛物线的顶点.

(3)两点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 二次函数的对称性：

二次函数是轴对称图形，其对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

3. 二次函数的增减性：(1)若 $a>0$，则当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(2)若 $a<0$,则当 $x<-\frac{b}{2a}$时,y 随 x 的增大而增大;当 $x>-\frac{b}{2a}$时,y 随 x 的增大而减小.

(3)$|a|$越大,抛物线的开口越大.

4.二次函数在给定范围上的最值.[符号 $f(x)$表示以 x 为自变量的函数]

当 $a>0$ 时,$f(x)$在 $p\leqslant x\leqslant q$ 上的最大值为 M,最小值为 m,令 $x_0=\frac{1}{2}(p+q)$.

若$-\frac{b}{2a}<p$,则 $f(p)=m$,$f(q)=M$;若 $p\leqslant-\frac{b}{2a}<x_0$,则 $f(-\frac{b}{2a})=m$,$f(q)=M$;

若 $x_0\leqslant-\frac{b}{2a}<q$,则 $f(p)=M$,$f(-\frac{b}{2a})=m$;若$-\frac{b}{2a}\geqslant q$,则 $f(p)=M$,$f(q)=m$.

【精讲典型例题】

例 1 已知二次函数 $f(x)$满足 $f(2)=f(-1)=-1$,且 $f(x)$的最大值是 8,求$f(x)$.

分析 设二次函数的一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,结合已知条件运用待定系数法求出 a,b,c.

解: ∵ $f(x)$为二次函数,

∴设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

由 $f(2)=f(-1)=-1$,且 $f(x)$的最大值是 8,得

$$\begin{cases}4a+2b+c=-1,\\ a-b+c=-1,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=8,\end{cases}\text{解方程,得}\begin{cases}a=-4,\\ b=4,\\ c=7.\end{cases}\text{从而 } f(x)=-4x^2+4x+7.$$

本题的另一种解法:∵$f(x)$为二次函数,$f(2)=(-1)$,

∴二次函数 $y=f(x)$图象的对称轴为 $x=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}$.

又∵$f(x)$的最大值是 8,

∴二次函数 $y=f(x)$图象的顶点为 $O'(\frac{1}{2},8)$,于是设 $f(x)=a(x-\frac{1}{2})^2+8$.

∵$f(2)=-1$,∴$a(2-\frac{1}{2})^2+8=-1$,

解方程,得 $a=-4$,从而 $f(x)=-4(x-\frac{1}{2})^2+8=-4x^2+4x+7$.

例 2 已知二次函数 $y=x^2+2(a-2)x+5$ 在 $x>4$ 上 y 随 x 的增大而增大，求实数 a 的取值范围.

分析 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $a>0$ 时，在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而增大；当 $a<0$ 时，情况则相反.

解： 因为二次函数 $y=x^2+2(a-2)x+5$ 的对称轴为直线 $x=2-a$，开口向上，

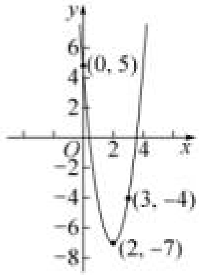
所以当 $x\geqslant 2-a$ 时，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore 4\geqslant 2-a$，解得 $a\geqslant -2$.

故实数 a 的取值范围为 $a\geqslant -2$.

例 3 已知 $f(x)=3x^2-12x+5$，当 $f(x)$ 的 x 的取值范围为下列情况时，求函数的最大值和最小值.

(1) $0\leqslant x\leqslant 3$；(2) $-1\leqslant x\leqslant 1$；(3) $x\geqslant 3$.



分析 作出 $y=3x^2-12x+5$ 的图象，如图，观察图象在所给 x 的范围上的变化趋势及图象的最高点和最低点，你发现了什么？

解： (1) 作 $y=3x^2-12x+5$ 的图象如图所示，由图可知，

函数 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上递减，

在 $2\leqslant x\leqslant 5$ 上递增，且 $f(0)=5$，$f(2)=-7$，$f(3)=-4$.

故当 $x=3$ 时，$f(x)_{\min}=-7$；当 $x=0$ 时，$f(x)_{\max}=5$.

(2) 由图可知，当 $f(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=-4$，$f(x)_{\max}=f(-1)=20$.

(3) 由图可知，$f(x)$ 在 $x\geqslant 3$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(3)=-4$.

例 4 设二次函数 $f(x)=x^2-4x-4$，$t\leqslant x\leqslant t+1$，($t$ 为实数)，求 $f(x)$ 的最小值 $g(t)$ 的解析式.

分析 已知二次函数的对称轴为直线 $x=2$，x 的取值范围直接影响到 $f(x)$ 的最小值，故要
对 x 的取值与对称轴的关系进行讨论.

解： $\because f(x)=(x-2)^2-8$，$t\leqslant x\leqslant t+1$.

(1) 当 $t\geqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 上是增函数.

$\therefore g(t)=f(t)=t^2-4t+4$.

(2) 当 $t<2\leqslant t+1$，即 $1\leqslant t<2$ 时，$g(t)=f(2)=-8$.

(3) 当 $t+1<2$，即 $t<1$ 时，

$f(x)$ 在 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 是减函数. $g(t)=f(t+1)=t^2-2t-7$.

经上可知，$g(t)=\begin{cases} t^2-2t-7 & (t<1), \\ -8 & (1\leqslant t<2), \\ t^2-4t-2 & (t\geqslant 2). \end{cases}$

【检测衔接作业】

一、选择题

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点坐标为(2,−1),与 y 轴的交点为(0,11),则 (　　)

A. $a=1,b=-4,c=11$　　B. $a=3,b=12,c=11$

C. $a=3,b=-6,c=11$　　D. $a=3,b=-12,c=11$

2. 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,且 $f(-1)=f(6)$,则 (　　)

A. $f(1)=f(4)$

B. $f(1)>f(4)$

C. $f(1)<f(4)$

D. 当 $a>0$ 时,$f(1)>f(4)$;当 $a<0$ 时,$f(1)<f(4)$

3. 二次函数 $y=x^2-4x+5(3\leqslant x\leqslant5)$的最小值是 (　　)

A. 5　　B. 10

C. 2　　D. 1

二、填空题

4. 已知抛物线 $y=(x-c)(x-d)-4$ 与 x 轴的交点为(6,0)和(1,0),则 $c=$________,$d=$________.

5. 开口向下的抛物线 $y=(m^2-2)x^2+2mx+1$ 的对称轴经过点(−1,3),则 $m=$________.

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在第一象限,与 x 轴的两个交点分别位于原点的两侧,则 a,b,c 的符号是________.

三、解答题

7. 已知二次函数的图象过点(1,0),(0,−1),(2,5),求此二次函数的解析式.

8. 已知函数 $y=-2x^2-4x+7$,根据下列 x 的范围求函数的最值.

(1)$-3\leqslant x\leqslant0$;(2)$-2\leqslant x\leqslant2$;(3)$0\leqslant x\leqslant4$;(4)$-3\leqslant x\leqslant-0.5$.

9. 二次函数 $y=x^2+4x+1$ 在 $x<a$ 上 y 随 x 增大而减小，试求实数 a 的取值范围.

10. 设 $f(x)=x^2+4x+3$，不等式 $f(x)\geqslant a$ 对任意的 x 恒成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案

1. D　点拨：设 $y=a(x-2)^2-1$，令 $x=0$，$y=11$，代入得 $y=3(x-2)^2-1$，即 $y=3x^2-12x+11$.

2. A　点拨：$f(-1)=f(6)\Rightarrow$对称轴为 $x=\frac{5}{2}$，从而 $f(1)=f(4)$.

3. C　点拨：$\because y=(x-2)^2+1$，$\therefore x=3$ 时，$y_{\min}=2$.

4. 2，5

5. -1　点拨：对称轴 $x=-\frac{m}{m^2-2}=-1$，则得 $m=2$ 或 -1，又 $m^2-2<0$，$\therefore m=-1$.

6. $a<0, b>0, c>0$　点拨：由$-\dfrac{b}{2a}>0$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}>0$，$\dfrac{c}{a}<0$，$\Delta=b^2-4ac>0$可得.

7. $y=2x^2-x-1$.

8. (1) $y_{max}=9, y_{min}=1$；(2) $y_{max}=9, y_{min}=-9$；

(3) $y_{max}=7, y_{min}=-41$；(4) $y_{max}=8.5, y_{min}=1$.

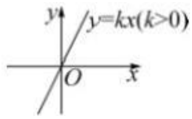
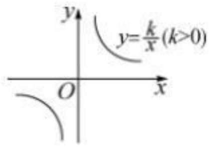
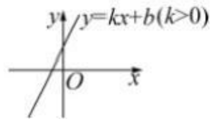
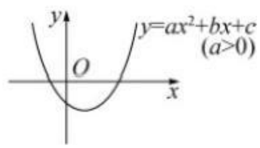
9. $a\leqslant-2$.

10. $a\leqslant-1$.

第 5 讲　函数图象与变换

【归纳初中知识】

在初中，我们学习了正比例函数、反比例函数、 一次函数以及二次函数等特殊的函数，了解了这些函数的图象特征.

函　数	图　象	性　质
正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$		①过点(0,0);②k>0时，图象是过Ⅰ、Ⅲ象限的直线，且x增大时， y增大；k<0时，图象是过Ⅱ、Ⅳ象限的直线， x增大时，y减小.
反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$		①k>0时，图象位于Ⅰ、Ⅲ象限，且x>0时，y随x增大而减小；x<0时，y随x增大而减小.②k<0时，图象位于Ⅱ、Ⅳ象限，且x>0时，y随x增大而增大；x<0时， y随x增大而增大.
一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$		①过点(0,b).②k>0时，y随x增大而增大；k<0时， y随x增大而减小.③图象位置与k,b有关.
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$		见第11讲

【衔接高中知识】

函数图象是函数性质的直观反映，是研究函数的重要工具.因此，在高中阶段，我们更多地利用函数图象的直观性来解决数学问题(图象法).利用图象解决数学问题是数形结合思想的重要体现，另一方面，利用已知函数的图象，通过适当的变换得到较复杂函数的图象，也是高中学习的一个重点.

一、图象变换

1.平移变换：所谓平移变换，就是将图形上的所有点，沿同一个方向移动相同的距离，得到一个新的图象.[f(x) 表示以x 为自变量的函数]

$y=f(x)\xrightarrow[a<0\text{时,向右平移}|a|\text{个单位}]{a>0\text{时,向左平移}a\text{个单位}}y=f(x+a)$

2.对称变换：所谓对称变换，就是将一个图形上的每一个点沿一条直线翻折得到一个新的图形.即两个图形关于此直线对称.

(1) $y=f(x)\xrightarrow[\text{图象绕}x\text{轴翻折上去}]{\text{保留}y=f(x)\text{在}x\text{轴上方部分,}x\text{轴下方}}y=|f(x)|$

(2) $y=f(x)\xrightarrow[\text{侧图象绕}y\text{轴翻折到左侧}]{\text{保留}y=f(x)\text{在}y\text{轴右侧部分,并把右}}y=f(|x|)$

3) $y=f(x)\xrightarrow{\text{将}y=f(x)\text{图象绕}y\text{轴翻折}180^\circ}y=f(-x)$

④) $y=f(x)\xrightarrow{\text{将}y=f(x)\text{图象绕}x\text{轴翻折}180^\circ}y=-f(x)$

二、二次函数“恒成立”问题

结合二次函数图象可知：

当a>0　且 △＜0 时，$ax^2+bx+c>$　0 恒成立;

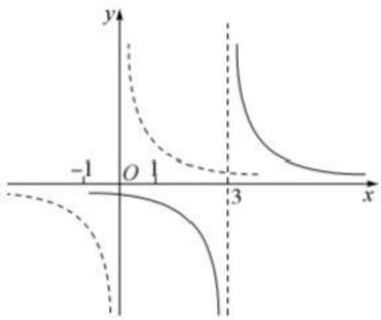
当a<0　且 △＜0 时，$ax^2+bx+c<0$　恒成立.

【精讲典型例题】

例1　(1)函数 $y=\frac{1}{x-3}$的图象可以由函数 $y=\frac{1}{x}$的图象如何变换得到?

(2)函数 $y=\frac{1}{x}-3$ 的图象可以由函数 $y=\frac{1}{x}$的图象如何变换得到?

解：(1)通过列表描点画出两个函数的图象.设点(a, b)是函数 $y=\frac{1}{x}$图象上的任意一点，



则 $b=\frac{1}{a}$,由此可得 $b=\frac{1}{(a+3)-3}$,

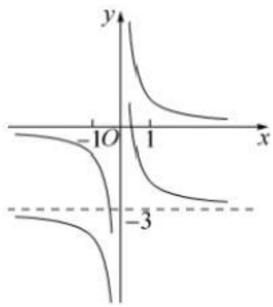
即 点(a+3,b)　在函数 $y=\frac{1}{x-3}$的图象上.

因此，将函数 $y=\frac{1}{x}$图象上的所有点，沿x 轴向正方向(右)平移3个单位，得到函数 $y=\frac{1}{x-3}$的图象.

(2)通过列表描点画出两个函数的图象.

设 点(a, b) 是函数 $y=\frac{1}{x}$图象上的任意一点，则 $b=\frac{1}{a}$,由此可得 $b-3=\frac{1}{a}-3$.

即 点(a,b—3) 在 函 数 $y=\frac{1}{x}-3$ 的图象上.



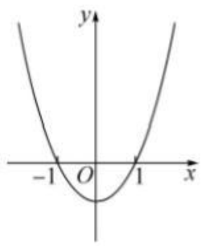
因此，将函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上的所有点，沿y 轴向负方向(下)平移3个单位，

得到函数 $y=\frac{1}{x}-3$ 的图象.

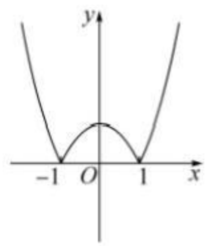
例 2 画出函数 $y=|x^2-1|$ 的图象.

分析 可寻求此函数与二次函数 $y=x^2-1$ 的图象的变化关系.

解：二次函数 $y=x^2-1$ 的图象是一抛物线，如图(1).



图(1)



图(2)

$$y=|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1, x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -1,\\ -(x^2-1), -1<x<1.\end{cases}$$

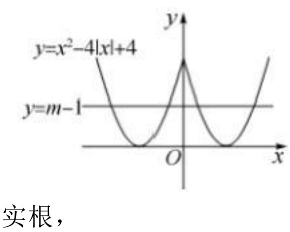
由解析式的特点可知，当 $x\geq 1$ 或 $x\leq -1$ 时，函数 $y=|x^2-1|$ 的图象与函数 $y=x^2-1$ 重合，即抛物线在x 轴上方部分保持不变；当 $-1<x<1$ 时，函数 $y=|x^2-1|$ 即为 $y=-(x^2-1)$，其图象与函数 $y=x^2-1$ 的图象关于x 轴对称，即抛物线在x 轴下方部分沿x 轴翻折.这两部分共同组成函数 $y=|x^2-1|$ 的图象，如图(2).

例 3 当 m 是什么实数时，方程 $x^2-4|x|+5=m$ 有四个互不相等的实根?

分析 讨论方程根的个数，把它整理成 $x^2-4|x|+4=m-1$，考查 $y=m-1$ 与 $y=x^2$ $4|x|+4$ 的交点问题.

解 法1:将原方程变形为：$x^2-4|x|+4=m-1$，

令 $y=x^2-4|x|+4$，则 $y=\begin{cases}(x+2)^2, x<0,\\ (x-2)^2, x\geqslant 0.\end{cases}$



它的图象如图所示：

而 $y=m-1$ 是一条与x 轴平行的直线，原方程有四个互不相等的实根，

即直线应与曲线有四个不同的交点.

由图象可知，当 $0<m-1<4$ 即 $1<m<5$ 时，直线与曲线有四个不同的交点.

所以当 $1<m<5$ 时，方程 $x^2-4|x|+5=m$ 有四个不相等的实根.

解 法2:原方程变形为 $(|x|-2)^2=m-1$，

$\therefore |x|-2=\pm\sqrt{m-1}\,(m\geq 1), |x|=2\pm\sqrt{m-1}$，

$x_1=2+\sqrt{m-1}, x_2=2-\sqrt{m-1}, x_3=-2-\sqrt{m-1}, x_4=-2+\sqrt{m-1}$.

要使这四个数互不相等，必须$m-1\neq0$　且$2-\sqrt{m-1}>0$，　即 $1<m<5$.

例4　对于任意实数x，不等式$ax^2+2ax-(a+2)<0$　恒成立，求实数a 的取值范围.

分析　令 $y=ax^2+2ax-(a+2)$，　结合函数的图象，知函数的图象应完全位于x 轴的下方.

解：(1)当a= 0 时，原不等式为$-2<0$恒成立；

(2)当$a\neq0$　时，由题意得：

$$\begin{cases} a<0, \\ \Delta=4a^2+4a(a+2)<0, \end{cases} \quad \therefore -1<a<0.$$

综上所述，实数a 的取值范围是$-1<a\leq0$.

【检测衔接作业】

一、选择题

1. 函 数$y=-2x^2$　的图象经过下列某个平移变换得到函数 $y=-2(x-1)^2+3$　的图象，则此平移变换是　(　　)

A. 向左平移1个单位，再向上平移3个单位

B. 向右平移1个单位，再向上平移3个单位

C. 向左平移1个单位，再向下平移3个单位

D. 向右平移1个单位，再向下平移3个单位

2. 将函数$y=2x+1$　图象上的所有点向左平移1个单位得到一个图象，其所对应的函数解析式是　(　　)

A. $y=2x-2$　　B. $y=2x-1$

C. $y=2x+2$　　D. $y=2x+3$

3. 如果点(a,b)是函数 $y=1-\frac{1}{x}$图象上的一点，那么下列点一定在函数 $y=1+\frac{1}{x}$图象上的是　(　　)

A. (a,b)　　B. $(-a,b)$

C. $(a,-b)$　　D. $(-a,-b)$

二、填空题

4. 将函数$y=-x^2$的图象向________(填“左”或“右”)平移________个单位，就可得到函数$y=-(x+2)^2$　的图象，再将此函数的图象向________(填“上”或“下”)平移________个单位，就可得到函数$y=-(x+2)^2+3$　的图象.

5. 将函数$y=x+1$　图象上的所有点通过____________变换得到函数 $y=-x+1$　的图象.（只要写出一种你认为合适的图象变换即可.）

6. 对于函数$y=|x|$,y　随 x 增大而增大的x 的取值范围是____________, y 随 x 增大而减小的 x 的取值范围是____________.

三、解答题

7. 画出下列函数的图象：

(1)$y=x^2+2x-3$;　　　　(2)$y=|x^2-2x-3|$.

8. 试分析函数$y=\frac{1}{x+3}$的图象与函数 $y=\frac{1}{x}$的图象的关系，并画出此函数的图象.

9. 求函数$y=|x+2|$　的图象与两坐标轴围成的面积.

10. 对于任意的实数x, 二次函数$y=x^2-2(a-1)x+2(a-1)$　的函数值恒大于0, 求实数a 的取值范围.

参 考 答 案

1.B　点拨：平移口诀“左加右减，上加下减”.

2.D　点拨：$y=2x-1\xrightarrow{\text{向左平移 1 个单位}}y=2(x+1)+1=2x+3$.

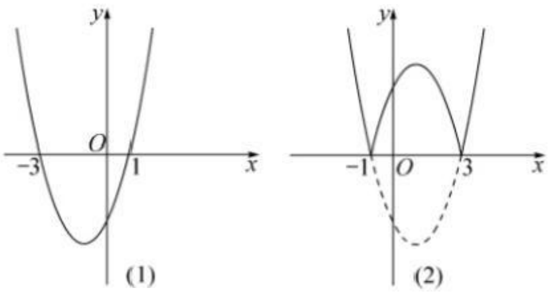
3.B　点拨：由 $b=1-\frac{1}{a}=1+\frac{1}{-a}$知点(-a,b)　在函数 $y=1+\frac{1}{x}$图象上.

4.左　2　上　3

5.关 于y 轴对称

6.x≥0　　x≤0

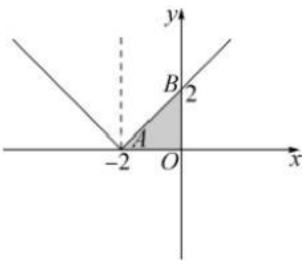
7.各函数图象如下：



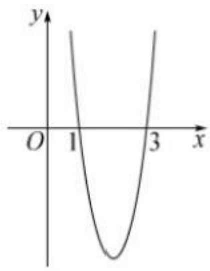
8.解：函数 $y=\frac{1}{x+3}$的图象是将反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象上的所有点向左平移3个单位得到的. 图略.

9.解：画出函数y=|x+2|　的图象.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.



第9题图



第10题图

10. 解：由已知得，二次函数$y=x^2-2(a-1)x+2(a-1)$ 图象上的所有点都在x 轴的上方，则抛物线开口向上，且与x 轴没有公共点.

因此$\triangle<0$, 即$4(a-1)(a-3)<0$. ①

观察二次函数$y=4(x-1)(x-3)$ 的图象可得，当$1<x<3$ 时，$y<0$,

即 $4(x-1)(x-3)<0$.

因此，不等式①的解为$1<a<3$, 即所求实数a 的取值范围为$1<a<3$.

第 6讲　角平分线性质定理与射影定理

【归纳初中知识】

在初中我们学习了三角形相似的有关知识，但很多相关的，有用的定理如三角形内(外)角平分线性质定理、射影定理都没有介绍，因此，我们有必要进一步探索它们之间的数量关系，并学会初步运用.

1. 相似三角形的定义

对应角相等，对应边成比例的三角形，叫做相似三角形. 相似的三角形对应边的比，叫做相似三角形的相似比，或称相似系数，常用 k 表示.

2. 相似三角形的判定

预备定理：平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

判定定理 2：如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似.

判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

判定定理 4：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

3. 相似三角形的性质定理

(1)相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

(2)相似三角形的对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比等于相似比.

(3)相似三角形周长的比等于相似比.

(4)相似三角形面积的比等于相似比的平方.

【衔接高中知识】

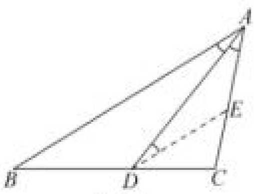
在高中阶段，三角形内(外)角平分线定理，射影定理都有着广泛的应用，如必修 2，选修 2－1中的立体几何，选修 2－1 中的解析几何，都要经常用到这两个定理.

一、三角形内(外)角平分线性质定理

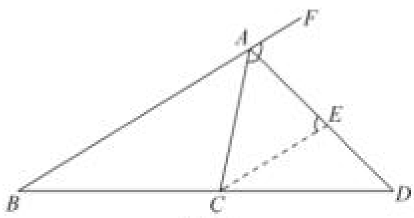
如图(1)，AD 平分$\angle BAC$，过 D 作 $DE\parallel AB$ 交 AC 于 E，则

$\frac{AE}{EC}=\frac{BD}{DC}$.

$\because \angle BAD=\angle DAC=\angle ADE$，$\therefore AE=DE$.



图(1)



图(2)

$\therefore \dfrac{DE}{EC}=\dfrac{BD}{DC}$. ①

由$\triangle DEC \backsim \triangle ABC$，得$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EC}{AC}$，即$\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$. ②

由①②得$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

如图(2)，AD 为$\triangle ABC$ 的外角平分线，过 C 作 $CE \parallel AB$ 交 AD 于 E，则 $\dfrac{AB}{CE}=\dfrac{BD}{CD}$.

$\because \angle CAD=\angle DAF=\angle AEC$，$\therefore AC=CE$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$.

由此得到三角形内(外)角平分线性质定理：

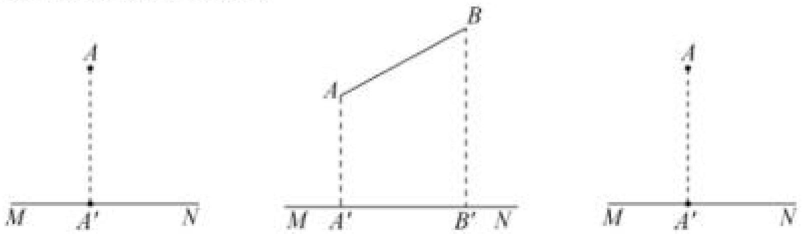
三角形内(外)角的平分线内(外)分对边所得的两条线段和相邻的两边对应成比例.

二、射影定理

从一点向一直线所引垂线的垂足，叫做这个点在这条直线上的正射影. 在图(3)中，$AA' \perp MN$，垂足 A' 是点 A 在直线 MN 上的正射影. 如果点 A 是 MN 上的点，那么 A 在 MN 上的正射影就是它本身.

一条线段在直线上的正射影，是指线段的两个端点在这条直线上的正射影间的线段. 在图(4)中，线段 AB 的两个端点 A 和 B 在直线 MN 上的正射影分别是 A' 和 B'，线段 $A'B'$ 是线段 AB 在直线 MN 上的正射影.

点和线段的正射影简称为射影.



图(3) 图(4) 图(5)

如图(5)，$\triangle ABC$ 是直角三角形，CD 为斜边 AB 上的高. 在这个图形中，由于线段 AD 与 CD，BD 与 CD，BC 与 AC 等相互垂直，因此可以从射影的角度来考察它们的关系. 你能发现这些线段之间的某些关系吗?

实际上，有些关系是非常明显的. 例如，由$\triangle BDC$ 为直角三角形可知 $BD<BC$；因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC \cdot BC=\dfrac{1}{2}CD \cdot AB$，所以 $AC \cdot BC=CD \cdot AB$；等等.

考察 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$：

因为$\angle ACD=90^\circ-\angle BCD$，$\angle B=90^\circ-\angle BCD$，所以$\angle B=\angle ACD$.

于是$\triangle ACD \backsim \triangle CBD$

因此$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$，

即 $CD^2=AD \cdot BD$. ①

在 Rt$\triangle BDC$ 和 Rt$\triangle BCA$ 中，

$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$，

所以$\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$，

即 $BC^2=BD\cdot AB$.　　②

同理，由$\triangle CDA\backsim\triangle BCA$，

有 $AC^2=AD\cdot AB$.　　③

①②③式反映了直角三角形的两直角边在斜边上射影与其他线段之间的关系，因而把这三个等式统称为直角三角形的射影定理.

射影定理：

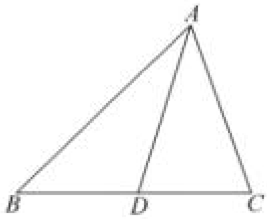
直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项，两直角边分别是它们在斜边上的射影与斜边的比例中项.

【精讲典型例题】

例 1　已知如图，AD 平分$\angle BAC$，$AB=3$ cm，$AC=2$ cm，

求(1)$BD:CD$；

(2)$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADC}$.



分析　直接利用角平分线性质定理，可求 $BD:CD$，再根据等高的三角形面积之比等于底边之比求 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADC}$.

解：(1)∵AD 平分$\angle BAC$，$AB=3$ cm，$AC=2$ cm，

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，

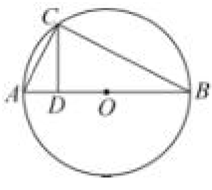
即 $BD:CD=3:2$.

(2)由 $BD:CD=3:2$ 可知 $BC:DC=5:2$，

∴$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADC}=5:2$.

例 2　如图，圆 O 上一点 C 在直径 AB 上的射影为 D，$AD=2$，$DB=8$，求 CD，AC 和 BC 的长.

解：因为$\angle ACB$ 是半圆上的圆周角，所以$\angle ACB=90°$，即$\triangle ABC$ 为直角三角形.



由射影定理可得

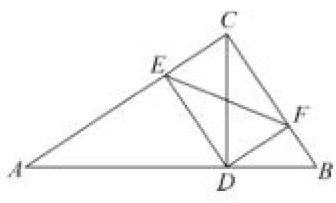
$CD^2=AD\cdot DB=2\times8=16$，$CD=4$；

$AC^2=AD\cdot AB=2\times10=20$，$AC=2\sqrt{5}$；

$BC^2=BD\cdot AB=8\times10=80$，$BC=4\sqrt{5}$.

例 3　如图，在$\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，垂足分别为 D，E，F，求证：$\angle CAB=\angle CFE$.

分析　要证明$\angle CAB=\angle CFE$，只需证明$\triangle CEF\backsim\triangle CBA$.



证明：在 Rt$\triangle ADC$ 中，$CD^2=CE\cdot CA$.

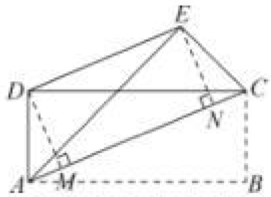
在 Rt$\triangle BDC$ 中，$CD^2=CF\cdot CB$.

故 $CE\cdot CA=CF\cdot CB$，即$\frac{CE}{CF}=\frac{CB}{CA}$.

又因为$\angle ACB$为公共角，所以$\triangle CEF \backsim \triangle CBA$.

即$\angle CAB=\angle CFE$.

例4 如图，一个矩形$ABCD$的两边分别为5和12，$\triangle ABC$沿对角线AC折叠后为$\triangle ACE$，其中CD与AE相交，求DE的长.



分析 图形折叠后，前后图形必全等，由此要善于找出相等的角与线段. 可利用直角三角形射影定理计算AM的长.

解： 分别过点D，E作AC的垂线DM，EN，垂足为M，N.

因为$\triangle ADC \cong \triangle CEA$，所以$DM=EN$，$AM=CN$.

而$DM /\!/ EN$，得四边形$DMNE$为矩形，$DE=MN$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，$AC=13$，$AD^2=AM \cdot AC$，得$AM=\frac{25}{13}$.

从而$MN=AC-2AM=13-\frac{50}{13}=\frac{119}{13}$.

因此$DE=\frac{119}{13}$.

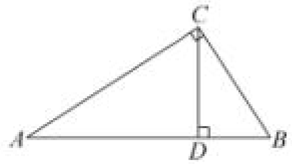
【检测衔接作业】

一、选择题

1. 已知$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，且$AB=2$，$AC=1$，则$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ADC}=$ （　　）

A. 1∶2　　B. 2∶1　　C. 1∶3　　D. 3∶1

2. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD \perp AB$于D，则图中相似三角形的对数有 （　　）



A. 1对　　B. 2对

C. 3对　　D. 4对

3. 若CD是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边上的高，$AD=3$，$CD=4$，则$BC=$ （　　）

A. 5　　B. $\frac{16}{3}$　　C. $\frac{20}{3}$　　D. $\frac{25}{3}$

二、填空题

4. 在直角三角形中，两直角边在斜边上的射影分别是2和6，则两条直角边分别是________和________，斜边上的高为________.

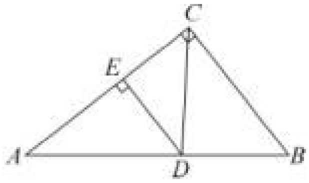
5. 一个直角三角形的两条直角边的比为1∶2，则它们在斜边上的射影之比是________.

6. CD是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边上的高，$S_{\triangle ABC}=20$，$AB=10$，则$AD=$________，$BC=$________.

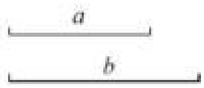
三、解答题

7. 在$\triangle ABC$中，顶点C在AB边上的射影为D，且$CD^2=AD \cdot DB$. 求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

8. 如图，CD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，$DE\perp AC$ 于点 E，$CD=\sqrt{10}$，$AE=3$，分别求 DE，BD，BC 的长.



9. 如图，已知线段 a，b，用尺规作线段 c，使 $c^2=ab$.



参考答案

1. D　点拨:由角平分线性质定理可以转化.

2. C　点拨:$\triangle ACD \backsim \triangle BCD$,$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$,$\triangle BCD \backsim \triangle ABC$.

3. C　点拨:由射影定理可知 $BD=\frac{16}{3}$,又 $BC^2=BD\cdot AB=\frac{16}{3}\times\frac{25}{3}$,$BC=\frac{20}{3}$.

4. 4　$4\sqrt{3}$　$2\sqrt{3}$　　5. 1∶4

6. $AD=2$　$BC=4\sqrt{5}$或 $AD=8$　$BC=2\sqrt{5}$

7. 证明:$\because CD^2=AD\cdot DB$,$\therefore \frac{CD}{AD}=\frac{DB}{CD}$.

在$\triangle ACD$ 和$\triangle BCD$ 中,$\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$,$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle BCD$,$\therefore \angle BCD=\angle A$,

又$\angle A+\angle ACD=90^\circ$,$\therefore \angle BCD+\angle ACD=90^\circ$,

即$\angle ACB=90^\circ$,$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

8. 解:$DE=\sqrt{6}$,$BD=\frac{2\sqrt{15}}{5}$,$BC=\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

9. 提示:利用射影定理.